XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria 2016

Problema 1. (3 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente.
Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:
 (i) Si $f(x) \in \mathbb{Z}$, entonces $x \in \mathbb{Z}$.
 (ii) $\lfloor f(x) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Problema 2. (4 puntos). Sean $a_1 < a_2 < ... < a_n$ enteros positivos impares.
Demuestra que,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]} < \frac{3}{2}.$$

Aquí $[a_1, a_2, ..., a_i]$ es el mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, ..., a_i$.

Problema 3. (4 puntos). Los números reales positivos a, b y c cumplen con la condición de que $ab + ac + bc \leq 3abc$. Demuestra que,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

Problema 4. (5 puntos). Sea G un grupo donde todo elemento $x \in G$, con $x \neq 1$, tiene orden p. Muestra que si en cualquier subconjunto A de G con $p^2 - 1$ elementos, hay p de ellos que conmutan dos a dos, entonces G es un grupo Abeliano.

Problema 5. (5 puntos). Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen:

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y), \text{ para todos los números reales } x, y.$$

Problema 6. (7 puntos). Para un entero positivo n, un acomodo n-bicoloreado consiste de 3 triángulos rojos y n triángulos azules que satisfacen las siguientes condiciones:
- No existe una recta que pase por los tres triángulos rojos.
- Cada triángulo rojo y cada triángulo azul se intersectan.

Determina el menor valor de k para el cual para cualquier acomodo n-bicoloreado se puedan encontrar k puntos del plano que toquen a todos los triángulos azules del acomodo.

Problema 7. (7 puntos). (a) Sea K un entero positivo y sea $f(x)$ un polinomio real distinto de cero que no tiene raíces complejas en el dominio definido por la condición angular $|arg z| < \frac{\pi}{2K}$.Demuestra que existe un polinomio real diferente de cero $g(x)$ tal que los coeficientes de $g(x)$ sean todos no negativos, que $f(x)$ divida a $g(x)$ y $grado\ g \leq K \cdot grado\ f$.
(b) Construye para todo entero positivo K un polinomio real distinto de cero $f(x)$ que no tenga raíces complejas en el dominio definido por la condición angular $|arg z| < \frac{\pi}{2K}$ y que satisfaga la propiedad que todo polinomio diferente de cero $g(x)$ que es divisible entre $f(x)$, que tenga solamente coeficientes no negativos, y ambién cumpla que $grado\ g \geq K \cdot grado\ f$.